FÜGGETLEN VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK ÖSSZEGÉRE VONATKOZÓ HATÁRELOSZLÁSTÉTELEK ÉLESÍTÉSE

Dr. PERGE IMRE

Ismeretes, hogy a valószínűségszámításban igen fontos szerepet játszik a független valószínűségi változók összegére vonatkozó határeloszlások problémaköre. Az idevonatkozó tételeket a gyakorlatban lényegileg közelítő formulák felállítására használják, véges, de elegendő nagy n esetén. Ahhoz, hogy e határértéktételek ilyen alkalmazása teljesen megalapozott legyen, ki kell egészíteni a maradéktagokra vonatkozó becslésekkel. Az egyforma eloszlású valószínűségi változók esetében e becslésekkel az [1.] monográfia foglalkozik. A nem egyforma eloszlású valószínűségi változók összegére vonatkozó határértéktételek élesítése közül pedig [2.]-ben vannak eredmények a normális eloszlásfüggvényhez való konvergencia irányában.

Jelen dolgozat célja — az egyforma eloszlású valószínűségi változókhoz hasonlóan — azon teljesebb eredmények bizonyítása, amelyek a független valószínűségi változók összege karakterisztikus-, illetve eloszlásfüggvényének a normális eloszlás karakterisztikus-, illetve eloszlásfüggvényéhez való konvergencia, valamint a rácsos eloszlású valószínűségi változók esetében a megfelelő lokális tétel élesítésére vonatkoznak.

Legyen adva a független valószínűségi változóknak egy sorozata: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. Jelöljük a ξ_k valószínűségi változók második, illetve harmadik abszolút momentumát

$$M(|\xi_k|^2) = b_k^2 \quad \text{és} \quad M(|\xi_k|^3) = c_k^3\text{-nel} \quad k = 1, 2 \ldots$$

a belőlük alkotott sor n-edik részletösszegét pedig

$$B_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2,$$

$C_n^3 = c_1^3 + c_2^3 + \ldots + c_n^3$-nel. Jelölje továbbá a ξ_k valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $F_k(x)$, illetve karakterisztikus függvényét $f_k(t)$.

Feltételezzük, hogy a $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek és nulla várható értékkel, továbbá véges harmadik abszolút momentummal rendelkeznek, ami miatt a

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{B_n}$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

$$\overline{f}_n(t) = \prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{t}{B_n}\right)$$

alakba írható és valamennyi valószínűségi változónak létezik a másod- és harmadrendű momentuma, illetve abszolút momentuma.

1. TÉTEL:

Ha a nulla várható értékű $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ független valószínűségi változóknak létezik a harmadik abszolút momentuma és

$$|t| \leq \frac{B_n}{5\,C_n} = T_n,$$

akkor

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \quad e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leq l\left(\frac{C_n}{B_n}\right)^3 |t|^3 e^{-\frac{t^2}{2}},$$

ahol l az n-től független állandó.

Bizonyítás.

Egy tetszőleges $\frac{\xi_k}{B_n}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

$$f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) = 1 - \frac{t^2 b_k^2}{2\,B_n^2} - i\,\frac{t^3}{6\,B_n^3}\int e^{i\,\vartheta\,t\,x}\, x^3\, d\,F_k(x)\,; \quad 0 < \vartheta < 1$$

alakba írható. Ezért

$$\left|f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \geq 1 - \frac{t_2\, b_k^2}{2\,B_n^2} - \frac{|t|^3\, c_k^3}{6\,B_n^3}$$

érvényes. Mivel $T_n \geq |t|$ így méginkább igaz, hogy

$$\left|f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \geq 1 - \frac{T_n^2\, b_k^2}{2\,B_n^2} - \frac{T_n^3\, c_k^3}{6\,B_n^3} \geq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c_k\, T_n}{B_n}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{c_k\, T_n}{B_n}\right)^3 \geq \frac{24}{25}.$$

Így $f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)$ a zérustól különbözik, ha $|t| \leq T_n$, ezért a vizsgált tartományban érvényes, hogy

$$l\,n\,f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) = -\frac{t^2 b_k^2}{2 B_n^2} + \frac{1}{6}\frac{t^3 \delta_k}{B_n^3},$$

ahol

$$\delta_k = \left[\frac{d^3}{d z^3} l\,n\,f_k(z)\right]_{z=\vartheta\frac{t}{B_n}}.$$

Tehát érvényes az

$$f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) = \exp\left\{-\frac{t_2 b_k^2}{2 B_n^2} + \frac{1}{6}\frac{t^3 \delta_k}{B_n^3}\right\}$$

és az

$$\bar{f}_n(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{1}{6}\frac{t^3 \sum_{k=1}^{n} \delta_k}{B_n^3}\right\}$$

egyenlőség. Felhasználva az abszolút momentumokra vonatkozó egyenlőtlenségeket $|\delta_k|$-ra az alábbi egyenlőtlenséget nyerjük:

$$\left|\frac{d^3}{d z^3} l\,n\,f_k(z)\right| = \left|\frac{f_k''' f_k^2 - 3 f_k'' f_k' f_k + 2 f_k'^2}{f_k^3}\right| < 7 c_k^3.$$

Ezért érvényes az

$$\left|\bar{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{e^{\frac{7}{6}\left(\frac{|t|\,C_n}{B_n}\right)} - 1\right\}$$

összefüggés. Azonban

$$|e^a - 1| \leq |a|\,e^{|a|}$$

miatt méginkább igaz, hogy

$$\left|\bar{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leq \frac{7}{6}\left(\frac{|t|\,C_n}{B_n}\right)^3 \exp\left\{\frac{7}{6}\left(\frac{|t|\,C_n}{B_n}\right)^3 - \frac{t^2}{2}\right\},$$

vagyis

$$\left|\bar{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leq l\left(\frac{|t|\,C_n}{B_n}\right)^3 e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. Ha a ξ_k valószínűségi változók egyforma eloszlásúak, akkor $B_n = b\sqrt{n}$, $C_n = c\sqrt[3]{n}$ és $T_n = \frac{b}{5c}\sqrt[6]{n}$

és így

$$\left|\bar{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leq l'\,|t|^3\, e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. TÉTEL:

Ha a nulla várható értékű $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \dots$ független valószínűségi változóknak létezik a harmadik abszolút momentuma, akkor

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq m \cdot \max\left\{\left(\frac{C_n}{B_n}\right)^3, \frac{C_n}{B_n}\right\}.$$

ahol m az n-től független állandó és

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Bizonyítás.

Ismeretes, hogy amennyiben A, T és ε pozitív állandók, F (x) és G (x) nem csökkenő függvények, továbbá

1. $F(\pm\infty) = G(\pm\infty)$,
2. $\int |F(x) - G(x)|\, dx < \infty$,
3. $G'(x)$ minden x-re létezik és $|G'(x)| \leq A$,
4. $\varepsilon = \int_{-T}^{T} \left|\frac{f(t) - g(t)}{t}\right| dt$,

ahol f (t) és g (t) az F (x) és G (x) karakterisztikus függvényét jelöli, akkor minden $k > 1$ számnak megfelel egy véges pozitív c (k) szám, amelyre

$$|F(x) - G(x)| \leq k\frac{\varepsilon}{2\pi} + c(k)\frac{A}{T}$$

([1.] 202. oldal 1. tétel.)

Legyen most $F(x) = F_n(x)$

és $$G(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$A = \max_{-\infty < x < \infty} |\Phi'(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

$$T = T_n = \frac{B_n}{5C_n}.$$

Az 1. tétel miatt ε-ra nyerjük, hogy

$$\varepsilon = \int_{-T_n}^{T_n} \left| \frac{\overline{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right| dt = l \left(\frac{C_n}{B_n} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq m' \left(\frac{C_n}{B_n} \right)^3$$

és így

$$| F_n(x) - \Phi(x) | \leq m_1 \left(\frac{C_n}{B_n} \right)^3 + m_2 \frac{C_n}{B_n} \leq m \cdot \max \left\{ \left(\frac{C_n}{B_n} \right)^3, \frac{C_n}{B_n} \right\}.$$

Említésre méltó, hogy amennyiben teljesül a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{C_n}{B_n} = 0$$

ún. Ljapunov-féle feltétel, akkor a fenti tételből következik a globális határeloszlástétel Ljapunov-féle alakja.

Természetesen merül fel ezek után a megfelelő lokális határértéktételekhez szükséges feltételek megállapításának problémája is. Nyilvánvaló, hogy a konvergencia biztosítására itt erősebb megkötések szükségesek, mint az eloszlásfüggvények konvergenciájánál. Ugyanis egy $F_n(x)$ függvénysorozat konvergenciájából nem következik az $F'_n(x)$, deriváltak konvergenciája.

Vizsgálatunk ezen a téren a rácsos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ független valószínűségi változók összegére vonatkozik:

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

$\overline{f}_n(t)$-vel jelölve ezen összeg karakterisztikus függvényét, a ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$, valószínűségi változók függetlensége miatt nyerjük, hogy

$$\overline{f}_n(t) = \prod_{i=1}^{n} f_i(t).$$

Ha a ξ_i valószínűségi változók, csak egész értékeket vesznek fel, akkor a ξ_n összeg is csak egész értékeket vehet fel. Bevezetve a

$$\mathbf{P}\{\xi_n = k\} = P_n(k) \quad \text{és a} \quad \mathbf{P}\{\xi_{nj} = k_{nj}\} = p_{nj}$$

jelölést, tetszőleges n-re igaz, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P_n(k) = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{j}^{\infty} p_{nj} = 1.$$

A ξ_n valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

$$f_n(t) = \mathbf{M}(e^{it\xi_n}) = \sum_j e^{itk_{nj}} p_{nj}$$

és a $k_{1j} + k_{2j} + \ldots + k_{nj} = k$ jelölés mellett a ζ_n valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

$$\bar{f}_n(t) = \mathbf{M}\left(e^{it\zeta_n}\right) = \sum_k e^{itk} P_n(k),$$

ahol p_{nj} és $P_n(k)$ a F o u r i e r-sor együtthatója segítségével számítható ki, vagyis

$$p_{nj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\, e^{-itk_{nj}}\, d\,t\,,\ (n = 1, 2, \ldots)$$

és

$$P_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}_n(t)\, e^{-itk}\, d\,t\,,$$

azaz

$$P_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \prod_{j=1}^{n} f_j(t)\, d\,t.$$

Bevezetve a $z_{nk} = z = \dfrac{k}{B_n}$ jelölést, $P_n(k)$-ra kapjuk, hogy

$$P_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itB_n z} \prod_{j=1}^{n} f_j(t)\, d\,t$$

és végül elvégezve az $x = t B_n$ helyettesítést nyerjük, hogy

$$B_n P_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} e^{-ixz} \prod_{j=1}^{n} f_j\left(\frac{x}{B_n}\right) d\,x\,.$$

3. TÉTEL:

Ha a nulla várható értékű, rácsos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ független valószínűségi változók csupán egész értékeket vesznek fel, maximális lépésük egy és létezik a harmadrendű abszolút momentumuk, továbbá bármely $\varepsilon > 0$-ra

$$B_n^2 \cdot \left|\bar{f}_n(t)\right| \leq K$$

hacsak $$\varepsilon\, B_n \leq |t| \leq \pi\, B_n\,,$$

akkor $$\left| B_n P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2{}_{nk}}{2}} \right| \leq l \cdot \max\left\{\left(\frac{C_n}{B_n}\right)^3, \frac{C_n}{B_n}\right\},$$

ahol l az n-től független állandó.

Bizonyítás.

A ζ_n valószínűségi változó karakterisztikus függvénye segítségével nyerjük, hogy

$$2\pi B_n P_n(k) = \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} e^{-itz} \prod_{r=1}^{n} f_r\left(\frac{t}{B_n}\right) dt .$$

Ezenkívül tudjuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Így érvényes a

$$2\pi \left\{ B_n P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \right\} = \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} e^{-itz} \overline{f}_n(t)\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz-\frac{t^2}{2}} dt .$$

egyenlőség. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{J}_1 = \int_{-T_n}^{T_n} e^{-itz} \left\{ \overline{f}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right\} dt ,$$

$$J_2 = \int_{T_n \leq |t| \leq \pi B_n} e^{-itz}\, \overline{f}_n(t)\, dt ,$$

$$J_3 = \int_{|t| > T_n} e^{-itz-\frac{t^2}{2}} dt ,$$

ahol T_n-et úgy válasszuk meg, mint az 1. tételben. Ezenkívül feltételezzük, hogy $T_n < \pi B_n$, mivel egyébként csak egyszerűsödnének a becslések.

Felhasználva az 1. tételt $|J_1|$-re nyerjük, hogy

$$|J_1| \leq l' \left(\frac{C_n}{B_n}\right)^3 \int_0^{\infty} t^3\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq l_1 \cdot \left(\frac{C_n}{B_n}\right)^3 .$$

Az $|J_3|$ integrál pedig a következőképpen becsülhető:

$$|J_3| \leq \int_{|t| \geq T_n} e^{-\frac{t^2}{e}} dt \leq 2 \int_0^{\infty} \frac{t}{T_n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq l_2 \cdot \frac{C_n}{B_n} .$$

Végül figyelembe véve e tételben szereplő feltételt $|J_2|$-re nyerjük hogy

$$|J_2| \leq 2\pi\, B_n\, |\overline{f}_n(t)| \geq \frac{2\pi K}{B_n} \leq l_3 \frac{C_n}{B_n} .$$

A becslések alapján tehát

$$|B_n P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}| \leq l \cdot \max \left\{ \left(\frac{C_n}{B_n} \right)^3, \ \frac{C_n}{B_n} \right\},$$

ahol l az n-től függetlcn állandó.

Következmény.

Amennyiben az emlitett tételben szereplő valószínűségi változók egyforma eloszlásúak, úgy a

$$B_n^2 \cdot |\overline{f_n}(t)| \leq K$$

feltétel teljesül az $\varepsilon B_n \leq |t| \leq \pi B_n$ intervallumban bármely $\varepsilon > 0$-ra, mert

$$|\overline{f_n}(t)| \leq e^{-nh}$$

és így

$$B_n^2 |\overline{f_n}(t)| \leq B_n^2 e^{-nh} \leq \frac{nb}{nh} = \frac{b}{h} = K.$$

Megjegyzés.

Az említett tételeknek természetesen, akkor van különös jelentőségük, ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{C_n}{B_n} = 0 .$$

Ekkor ugyanis

$$\lim_{n \to \infty} \overline{f_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

és

$$\lim_{n \to \infty} B_n P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

a) A

$$\lim_{n \to \infty} \frac{C_n}{B_n} = 0$$

feltétel egyforma eloszlású valószínűségi változók, illetve az abszolút momentumok korlátossága esetén nyilván teljesül, ugyanis $b_k \geqq b$ és $c_k \leqq c\,, \quad k = 1, 2, \ldots$

és így $B_n \geqq b\sqrt{n}\,, \quad C_n \leqq \sqrt[3]{n}\,,$

vagyis $$\frac{C_n}{B_n} \leqq \frac{c}{b}\,\frac{1}{\sqrt[6]{n}} \to 0\,,$$

ha $n \to \infty$

b) Ha a ξ_k valószínűségi változók nem egyforma eloszlásúak, akkor pl. a következő kiegészítő feltételeket szabhatjuk meg:

1. a ξ_k valószínűségi változók egyenletesen korlátosak,

$$|\xi_k| \leqq K\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

2. és $\lim\limits_{n \to \infty} B_n = \infty\,.$

E kiegészítő feltételek figyelembevételével ugyanis

$$c_k^3 = \mathbf{M}\,\{|\xi_k|^3\} \leqq K \cdot \mathbf{M}\,\{|\xi_k|^2\} = K\,b_k^2\,,\ (k = 1, 2, \ldots)$$

és így $$C_n \leqq \sqrt[3]{K B_n^2}\,,$$

vagyis $$\frac{C_n}{B_n} \leqq \sqrt[3]{\frac{K}{B_n}} \to 0\,, \text{ ha } B_n \to \infty\,.$$

DAS SCHÄRFEN DER GRENZVERTEILUNGSSÄTZE AUF DIE UNABHÄNGIGEN ZUFALLSVERÄNDERLICHEN

I. PERGE

ZUSAMMENFASSUNG

Es sei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ eine Folge der Zufallsveränderlichen gegeben. Bezeichne

$$\mathbf{M}\,\{|\xi_k|^2\} = b_k^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{M}\,\{|\xi_k|^3\} = c_k^3\,,\ (k = 1, 2, \ldots)$$

die absoluten Momente zweiten beziehungsweise dritten Grades der Zufallsveränderlichen ξ_k und

$$B_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\,,$$
$$C_n^3 = c_1^3 + c_2^3 + \ldots + c_n^3$$

die Summe dieser Momenten und endlich $F_k(x)$ und $f_k(t)$ die Verteilungsfunktion, beziehungsweise die charakteristische Funktion der Zufalls-

veränderlichen ξ_k. Es seien ferner die Zufallsveränderlichen ξ_k unabhängig und

$$\mathbf{M}\{\xi_k\} = 0, \ \mathbf{M}\{|\xi_k|^3\} < \infty \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Unter solchen Bezeichungen und Voraussetzungen nachstehende Sätze haben mit der Gültigkeit:

Wenn $$|t| \leq \frac{B_n}{5C_n},$$

so gilt $$\left| \prod_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq l \cdot \left(\frac{|t|\,C_n}{B_n}\right)^3 e^{-\frac{t^2}{2}},$$

wo unabhängige Konstante l von n. (Satz 1.)

An die Folge der Verteilungsfunktion

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq m \cdot \max\left\{\left(\frac{C_n}{B_n}\right)^3, \frac{C_n}{B_n}\right\}$$

gilt, wo unabhängige Konstante m von n und

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

(Satz 2.) Aus diesem Satz folgt der Liapounoffsche — Satz, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \frac{C_n}{B_n} = 0.$$

Wenn die Werte den gitterartigen Zufallsveränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ nur ganze Zahlen, der maximal Tritt 1 sein können, ferner zu jedem $\varepsilon > 0$,

$$B_n^2 \cdot |\overline{f}_n(t)| \leq K,$$

sobald $$\varepsilon B_n \leq |t| \leq \pi B_n,$$

so gilt $$\left| B_n P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2_{nk}}{2}} \right| \leq l \cdot \max\left\{\left(\frac{C_n}{B_n}\right)^3, \frac{C_n}{B_n}\right\},$$

wo unabhängige Konstante l von n und

$$P_n(k) = \mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = k\}$$

und $$z_{nk} = \frac{k}{B_n}. \qquad \text{(Satz 3.)}$$

Im Falle der gleichförmigen Verteilung der Zufallsveränderlichen ξ_k — wegen Sätze 1—3. — in [1] vorkommende Sätze sind.

IRODALOM

[1] B. V. Gnyegyenko—A. N. Kolmogorov: Független valószínűségi változók összegének határeloszlásai. Budapest, 1951.
[2] Cramér, H.: Random Variables and Probability Distributions. Cambridge, 1937.
[3] Erich Kamke: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. Leipzig, 1932.
[4] Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás. Budapest, 1954.